بسمه تعالیٰ

تمرین دوم درس نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

نیم‌سال دوم تحصیلی ۰۵–۱۴۰۴

مسئول تمرین: امیرعلی شیخی

دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر
مدرس: دکتر محمد ایزدی

موعد تحویل پاسخ‌ها یکشنبه ۲۷ اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۵ ساعت ۲۳:۵۵ است.

۱. این تمرین مجموعا ۱۱۰ نمره است که کسب ۱۰۰ نمره به معنای نمره کامل تمرین است.

۲. هم‌فکري در حل تمرین‌ها بلامانع است، اما با مشابهت‌هاي غیرمتعارف در پاسخ‌نامه‌ها مطابق با آئین‌نامه‌ي دانشکده برخورد خواهد شد.

۱. (۱۵ نمره) هرکدام از گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

(آ) تعدادی بازه‌ی باز به فرم (a, b) با شرط $a < b$ روی محور اعداد حقیقی در نظر گرفته شده است، طوری که هیچ دو بازه‌ای اشتراک ندارند. ثابت کنید تعداد این بازه‌ها شمارا است.

(ب) تعدادی دایره با شعاع مثبت روی صفحه رسم شده است. می‌دانیم هیچ دو دایره‌ای اشتراک ندارند. ثابت کنید تعداد این دایره‌ها شمارا است.

(ج) تعدادی دایره با شعاع مثبت در صفحه رسم شده است، طوری که هیچ سه‌تایی از آن‌ها اشتراک ندارند. ثابت کنید تعداد این دایره‌ها نیز شمارا است.

۲. (۱۵ نمره) گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

(آ) به ازای هر عدد طبیعی n داریم $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$.

(ب) اجتماع شمارا مجموعه‌ی هم‌اندازه‌ی $\mathbb{R}$، یک مجموعه‌ی هم‌اندازه‌ی $\mathbb{R}$ است.

(ج) کاردینالیتی مجموعه توابعی که از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ تعریف می‌شوند بزرگتر از $\mathbb{R}$ است.

۳. (۱۵ نمره) مجموعه‌ای شمارا از نقاط در صفحه داریم، نشان دهید می‌توان آن را به دو زیر مجموعه A و B افراز کرد به طوری که A با هر خط افقی در صفحه و B با هر خط عمودی در صفحه تعداد متناهی اشتراک داشته باشد.

۴. (۲۰ نمره) برای هر یک از زبان‌های زیر یک گرامر منظم بنویسید.

(آ) $L = \{w \in \{a\}^* : |w| \; mod \; ۳ > ۰\}$

(ب) $L = \{a^n b^m : n + m \; is \; odd\}$

(ج) $L = \{vwv : v, w \in \{a, b\}^*, |v| = ۲\}$

(د) مجموعه ی تمام اعداد در مبنای ۴ که به عدد ۷ بخش پذیرند.

۵. (۱۵ نمره) ثابت کنید کاردینال توابع پیوسته از R به R برابر کاردینال R است. (R مجموعه اعداد حقیقی است)

۶. (۲۰ نمره) برای مجموعه های زیر گرامر های از نوع گفته شده بنویسید.

(آ) $\{a^n b^m c^{n+m} | n, m \geq ۰\}$. گرامر مستقل از متن.

(ب) مجموعه رشته های از ۰ و ۱ که غیر پالیندروم هستند. گرامر مستقل از متن.

(ج) $\{a^n b^n c^n | n \geq ۰\}$. گرامر حساس به متن.

(د) $\{a^k | k = n^۲, n > ۰\}$. گرامر نوع ۰ (بدون محدودیت).

۷. (۱۰ نمره امتیازی) اگر از A به B و همچنین از B به A تابع یک به یک داشته باشیم، آنگاه ثابت کنید از A به B تابع یک به یک و پوشا داریم.